# 力学系の分岐点とKMS state (応用函数解析としての情報数理の研究)



梶原, 毅

数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 103-113



# 力学系の分岐点と KMS state

岡山大学・環境理工学部　梶原 毅 (Tsuyoshi Kajiwara)
Faculty of Environmental Science and Technology,
Okayama University

## 1 序

有理関数によってリーマン球面上に与えられる力学系, またコンパクト位相空間上の自己相似写像の組で与えられる力学系に対して, ヒルベルト $C^*$-双加群を経由して, Pimsner 構成により $C^*$-環を構成することができる. もとの力学系の性質は, 作られた $C^*$-環の性質に反映される. もとの力学系の性質と作られた $C^*$-環の性質との相互関係を調べることは興味深い問題である. 以前の研究において, 有理関数力学系をジュリア集合に制限した場合, および自己相似写像の場合に $C^*$-環が単純かつ純無限になることを示した. また, 作られる $C^*$-環の K-群についても調べている.

これらの力学系, 特に有理関数力学系の重要な特徴は, 局所同相写像でなくなる点, すなわち分岐点または特異点をもつことである. 分岐点を持つ場合にはヒルベルト $C^*$-双加群が有限生成でなくなる. しかし, 上記の単純性, 純無限性については分岐点が存在してもなりたつ. K-群については分岐点の性質を反映していると思われるが, 対応は必ずしも明らかではない. 分岐点の情報をつかまえるためには $C^*$ 環側で何を考えたらよいだろうか.

これらの力学系から作られる $C^*$-環には自然なゲージ作用が存在し, この作用に関する KMS state を考えることができる. 自己相似写像で分岐点のない場合には, Pinzari-Watatani-Yonetani [9] により, 生成される $C^*$-環はクンツ環で KMS state は一意的であることが知られている. 分岐点を持つ場合には, 分岐点に対応する KMS state が新規に現れる. 有理関数力学系の場合には KMS state の完全分類を行うことができ, その情報によって, 有理関数の次数, 分岐点の個数, 例外点の個数と型などのもとの力学系の情報を復元することができる.

なお, 本稿は綿谷安男, 泉正己両氏との共同研究の一部であり, 研究全体は, Izumi-Kajiwara-Watatani[3] で公表予定である.

# 2 定義と準備

## 2.1 ヒルベルト C*-双加群と Pimsner 構成

$A$ を C*-環とし, $X$ を右ヒルベルト $A$-加群とする. $L(X)$ で $X$ 上の線形作用素で右 $A$ 内積に関して随伴作用素をもつようなもの全体を表す. これは C*-環である. $L(X)$ の中で有限階作用素全体のノルムの閉包を $K(X)$ とする. $A$ から $L(X)$ への *単射 $\phi$ があるとき, $(X, A)$ を $A$ 上のヒルベルト C*-双加群またはヒルベルト $A$-$A$ 加群という. $I_X = \phi^{-1}(\phi(A) \cap K(X))$ とおき, コンパクトイデアルという. $(X, A)$ から作られる Cuntz-Toeplitz 環 $\mathcal{T}_X$ とは, $\{S_\xi | \xi \in X\}$ と $A$ によって生成され, 次の関係

$$S_\xi a = S_{\xi a}, \qquad a S_\xi = S_{\phi(a)\xi}, \qquad S_\xi^* S_\eta = (\xi|\eta)_A$$

を満たす普遍的な C*-環であり, さらに $\mathcal{T}_X$ を関係式

$$\varphi(\phi(a)) = a \qquad for a \in I_X$$

で割ったものが, Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ である. ここで, $\varphi$ は, $\theta_{\xi,\eta} \to S_\xi S_\eta^*$ で与えられる $K(X)$ から $\mathcal{T}_X$ への *-同型である. $a \in A$, および $\xi \in X$ と $\mathcal{O}_X$ の中の像を同一視し, $a$, $\xi$ とかく. $\mathcal{O}_X$ 上には $\alpha_t(\xi) = e^{it}\xi$ で決まる 1 径数自己同型群があり, ゲージ作用と呼ぶ.

## 2.2 複素力学系と自己相似写像

### 2.2.1 複素力学系

$h(z)$ を有理関数とし, リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上に $h$ によって与えられる複素力学系を $(\hat{\mathbb{C}}, h)$ とかく. $h'(z_0) = 0$ となるような $z_0$ を分岐点とよぶ. 分岐点の集合を $B(h)$ と表す. $h(z) = h(z_0) + c(z - z_0)^n + \text{higherterms}$ $(n \geq 2)$, $c \neq 0$ と局所的に書けるとき $e(z_0) = n$ と書き,$z$ における被覆指数とよぶ. 分岐点でないときは, $e(z_0) = 1$ としておく. また, $z_0 \in B(h)$ のとき, $w_0 = h(z_0)$ を分岐値とよび, 分岐値全体の集合を $C(h)$ とかく.

$\mathcal{C}_h = \{(z, w) \in \hat{\mathbb{C}}^2 | w = h(z)\}$ とおく. $A = C(\hat{\mathbb{C}})$, $X_h = C(\mathcal{C}_h)$ とする. $X_h$ は,

$$(a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y)$$

によって $A$-$A$ 加群の構造をもつ. また,

$$(f|g)_A(w) = \sum_{z \in h^{-1}(w)} e(z) \overline{f(z, w)} g(z, w)$$

によって $(f|g)_A(w)$ を定義する.

**Proposition 1.** *(Kajiwara-Watatani [4])* $(f|g)_A(w)$ は連続関数になり, これらの構造によって, $X_h$ は $A$ 上のヒルベルト $C^*$-双加群である.

$X_h$ から作られる Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_{X_h}$ を $\mathcal{O}_h$ ともかき, $h$ で決まる複素力学系に付随した C*-環とよぶ.

**Proposition 2.** *(Kajiwara-Watatani [4])* $h$ は有理関数とする. $X_h$ のコンパクトイデアル $I_X$ は次で与えられる.

$$I_X = \{a \in A | a(z) = 0\ z \in B(h)\}$$

有理関数 $h$ の例外点とは, $z$ の逆軌道 $\{h^{-n}(z) | n = 0, 1, 2, \ldots, \}$ が有限集合になる点である. 有理関数の例外点は高々 2 個であり, 例外点が 2 個の場合は共役を除いて完全に分類されている.

**Proposition 3.** *(Beardon [1])*

1. 例外点が 2 個の有理関数の場合は, 次のいずれかに共役である. $h_1(z) = az^N$ $(N \geq 2)$ か, $h_2(z) = az^{-N}$ $(N \geq 2)$. 例外点はいずれも $\{0, \infty\}$ である.
2. $h_1$ については, $z_0$ の逆軌道は $\{0\}$ 1 点, $\{\infty\}$ の逆軌道も $\{\infty\}$ 1 点である.
3. $h_2$ については, $z_0$ の逆軌道は $\{z_0, \infty\}$ である. $\infty$ についても同じ.
4. 例外点が 1 個 で $\{\infty\}$ の場合は多項式で, $h_1$ 以外の形のものである.

### 2.2.2 自己相似写像

$(K, d)$ をコンパクト距離空間とする. $K$ 上の連続写像 $\xi$ が真の縮小写像であるとは, 定数 $0 < c_1 \leq c_2 < 1$ があり,

$$c_1 d(y_1, y_2) \leq d(\xi(y_1), \xi(y_2)) \leq c_2 d(y_1, y_2) \qquad y_1,\ y_2 \in K$$

をみたすことである. $N \geq 2$ を自然数とし, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ を $(K, d)$ の真の縮小写像の族とする. $K$ が $\gamma$ に関して自己相似であるとは, $K = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i(K)$ となることである. 以下, $K$ は $\gamma$ に関して自己相似とする.

$K$ の分岐点 $B(\gamma)$, 分岐値 $C(\gamma)$ を次のように定義する.

$$B(\gamma) = \{x \in K | x = \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \text{ for some } y \in K \text{ and } j \neq j'\}$$
$$C(\gamma) = \{y \in K | \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \text{ for } j \neq j'\}$$

次の二つの条件を考える.

**Definition 4.** $\gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^N$ が開集合条件をみたすとは, $K$ の空でない開集合 $V$ で, $\bigcup_{i=1}^N \gamma_i(V) \subset V$ であり, $j \neq j'$ に対して, $\gamma_j(V) \cap \gamma_{j'}(V) = \phi$ となるものが存在することである.

$\gamma$ が有限分岐点条件をみたすとは, $C(\gamma)$ が有限集合となることである.

$(x,y)\in \mathcal{C}_\gamma$ に対して, 被覆指数 $e(x,y)$ を

$$e(x,y) = \#\{j \in \{1,\dots,N\} | \gamma_j(y) = x\}$$

と定義する.

複素力学系の場合と同様に, $A = \mathrm{C}(K)$, $X_\gamma = \mathrm{C}(\mathcal{C}_\gamma)$ として,

$$(a\cdot f\cdot b)(x,y) = a(x)f(x,y)b(y) \qquad (f|g)_A(y) = \sum_{j=1}^{N} \overline{f(\gamma_j(y),y)}g(\gamma_i(y),y).$$

で, 両側 $A$ 作用 $A$-値内積を定義できる. $X_\gamma$ は $A$ 上のヒルベルト C*-双加群となることが示せる. $X_\gamma$ から作られる Cuntz-Pimsner 環を $\mathcal{O}_\gamma$ とかく.

**Proposition 5.** *(Kajiwara-Watatani [5])* $\gamma$ が開集合条件をみたすとき, $\mathcal{O}_\gamma$ は単純, 純無限, 核型かつ *UCT* クラスである.

**Proposition 6.** *(Kajiwara-Watatani [5])* $\gamma$ が開集合条件をみたすとき, コンパクトイデアル $I_{X_\gamma}$ は次のように記述される.

$$I_X = \{a \in A | a(y) = 0,\ y \in B(\gamma)\}$$

## 2.3 Cuntz-Pimsner 環の KMS state

$\mathcal{A}$ を単位元をもつ C*-環とし, $\alpha$ は $\mathcal{A}$ 上の 1 径数自己同型群とし, $\mathcal{A}_\alpha$ は $\alpha$ に関する解析的元全体の集合とする. $\mathcal{A}$ 上の state $\varphi$ が $\alpha$ に関する $\beta$-KMS state であるとは, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}_\alpha$ の任意の *-部分環として, $a \in \mathcal{A}$ と $b \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\varphi(a\alpha_{i\beta}(b)) = \varphi(ba)$$

がなりたつことである.

$A$ を単位元をもつ C*-環, $X$ を ヒルベルト $A$-$A$ -加群とし, $\mathcal{O}_X$ の ゲージ作用 $\gamma$ に関する KMS state を分類する問題を考える. $X_A$ が有限型のときには Pinzari-Watatani-Yonetani [9] により, 可算生成の場合には, Laca-Neshveyev [8] により, $\mathcal{O}_X$ の KMS state の分類問題は, $A$ 上の tracial state で, ある条件をみたすものに帰着されている.

$X_A$ の可算基底 $(u_k)_{k=1,2,\dots,}$ を固定する.

**Proposition 7.** *(Laca-Neshveyev [8])* $\lambda = e^\beta$ とする. $\mathcal{O}_X$ の *β-KMS state* $\varphi$ を $A$ に制限すると, 次のふたつの条件をみたす $A$ 上の *tracial state* $\tau$ になる.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau((u_k|au_k)_A) = \lambda\tau(a) \quad (\forall a \in I_X) \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau((u_k|au_k)_A) \leq \lambda\tau(a) \quad (\forall a \in A^+) \quad (2)$$

逆に, $A$ 上の *tracial state* $\tau$ で *(1), (2)* をみたすものに対して, $\mathcal{O}_X$ 上の $\beta$-*KMS state* $\varphi$ で, $A$ に制限すると $\tau$ になるものを作ることができる. さらにそのような $\varphi$ は一意的である. なお, この対応は凸集合としての構造を保存している.

ここで, Laca-Neshveyev [8] に従い, KMS state の型を定義する. $\mathcal{O}_X$ の $\beta$-KMS state $\varphi$ に対応する $A$ 上の tacial state $\tau$ が

1. $A$ 上の trace $\tau_0$ があって $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} F^i(\tau_0)$ とかけるときは $\varphi$ は有限型という.
2. $F(\tau) = \tau$ がなりたつときは, $\varphi$ は無限型という.

なお, この定義が $(\mathcal{O}_\alpha, \alpha)$ だけではなく, C*-環を生成している双加群の構造に依存していることに, 注意を要する.

さらに, $\tau$ が (2) をみみたすとき, $F(\tau)$ を

$$F(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau((u_k|au_k)_A)$$

で定義すると, $F$ は $A$ の tracial state 上の線形写像である. 上の Proposition の条件は $F$ についての条件であり, $I_X = A$ なら $F$ の固有値問題である. 以下, $F$ を Ruell-Perron-Frobenius 作用素とよぶ.

## 3 可算基底の構成と Ruell-Perron-Frobenius 作用素の計算

KMS state の分類において前節で導入した $F$ が重要である. しかし $F$ は可算基底によって表されており, わかりにくい. そこで, 基底を具体的に構成することにより, $F$ のわかりやすい表示を得たい. 複素力学系, および自己相似写像に付随するヒルベルト C*-双加群に対して可算基底を具体的に構成する. 分岐点を持つ場合についての基底の構成は, 知る限り始めて得られたものである.

複素力学系に対して構成の概略を説明する. 自己相似写像の場合も同様である. 最初に $h(z) = z^n$ の場合を考える. $i \geq 1$ を自然数とし, $L$ を正の定数として, $[0, \infty)$ 上の連続関数 $r_i(x)$ を

$$r_i(x) = \begin{cases} 1 & \frac{L}{i} \leq x \\ \frac{i}{L}x & \frac{M}{2i} \leq x \leq \frac{L}{i} \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2i}. \end{cases}$$

と定義し, $r_0(x) = 0$ とおく. さらに, $v_i(x) = (r_i(x) - r_{i-1}(x))^{1/2}$ とおく. また, $1 \leq p \leq n-1$ に対して, $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上の関数 $\xi_p(z)$ を

$$\xi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{z}{|z|}\right)^p$$

によって定義する.

これらを用いて, $i \geq 1$, $1 \leq p \leq n-1$ に対して,

$$u_{1+(n-1)(i-1)+p}(z, z^n) = \xi_p(z) v_i(|z|),$$

とおく.

**Proposition 8.** $h(z) = z^n$ のとき, $\{u_i\}_{i=1,\dots}$ はヒルベルト $C^*$-加群 $X_h$ の基底になる.

次に $a$ を分岐点, $b = h(a)$ とする. $a$ の十分小さい閉近傍 $U$ で, $h|_{U-\{a\}}$ が同相写像になるものをとり, $V = h(U)$ とする. $A = \mathrm{C}(V)$ とおく. $\mathcal{C} = \{(z, h(z)) | z \in U\}$, $X = \mathrm{C}(\mathcal{C})$, とする. $U$, $V$ から $0 \in \mathbf{C}$ の二つの閉近傍とそこへの同相写像を適当に選べば, $h(z)$ は $h(z) = z^n$ と共役になる. 従って, $X_A$ の基底の構成は, $h(z) = z^n$ の場合に帰着される. 一般の場合は, $\hat{\mathbf{C}}$ を開被覆で分割してそこに制限したヒルベルト $\mathrm{C}^*$-加群を考える. これは直前に考えたヒルベルト $\mathrm{C}^*$- 加群の直和になっているので基底を構成できる. さらに開被覆に付随した単位の分割によって局所的に定義した基底を寄せ集めれば, 全体の力学系から作られるヒルベルト $\mathrm{C}^*$-加群の基底になる.

自己相似写像で有限分岐点条件, 開集合条件を満たす場合にも, 同様の構成を行って基底を作ることができる.

以上の基底を用いて $F$ を記述し, KMS state に対応する $A$ 上の trace についてのわかりやすい記述を得る. $a \in A = \mathrm{C}(K)$ に対して, ボレル関数 $\tilde{a}$ を次のように定義する. 複素力学系の場合は,

$$\tilde{a}(w) = \sum_{w \in h^{-1}(w)} a(z)$$

であり, 自己相似写像の場合は,

$$\tilde{a}(y) = \sum_{x \in \gamma(y)} a(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{e(\gamma_j(y), y)} a(\gamma_j(y)).$$

と定義する.

**Proposition 9.** 複素力学系, 自己相似写像の場合において構成した可算基底を $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ とする. そのとき, $a \in A$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k | a u_k)_A(y) = \tilde{a}(y)$$

がなりたつ. ここで, 左辺の収束は無条件収束である.

これにより, $F$ は,

$$F(\tau(a)) = \tau(\tilde{a})$$

とかける. 従って, $\mathcal{O}_X$ の KMS state と $A$ の trace との対応は, 次のように基底を使わない形で表せる. $K$ はリーマン球面または自己相似集合を表すものとする. $A$ 上の trace は, $K$ 上のボレル測度に対応する.

**Theorem 10.** *有理関数力学系または有限分岐点条件, 開集合条件をみたす自己相似写像系に付随する Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_X$ とその上のゲージ作用 $\alpha$ を考える. $\varphi$ で $\mathcal{O}_X$ 上の $\beta$-KMS state とする. そのとき, $\varphi$ の $A = C(K)$ への制限によって現れる $K$ 上の Borel 測度 $\mu$ は次の (3), (4) をみたす.*

$$\tau^{\mu}(\tilde{a}) = \lambda\tau(a) \qquad (a \in I_X) \quad (3)$$
$$\tau^{\mu}(\tilde{a}) \leq \lambda\tau(a) \qquad (a \in A^+) \quad (4).$$

*ただし, $\lambda = e^{\beta}$ である.*

*逆に, $K$ 上のボレル測度 $\mu$ で (3), (4) をみたすものに対して, $\mathcal{O}_X$ 上の $\beta$-KMS state $\varphi$ で, $\varphi|_A = \tau^{\mu}$ をみたすものが一意的に存在する.*

なお, $I_X$ はそれぞれ $B(h)$ および $B(\gamma)$ 上で 0 になる関数族として特徴づけられている.

# 4 KMS state の分類

ここまでの準備により, 複素力学系および有限分岐点条件, 開集合条件をみたす自己相似写像から作られた C*-環上の KMS state の分類を行う.

## 4.1 複素力学系

$\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル測度 $\mu$ が Theorem 10 (3), (4) をみたすとする. $\mu$ の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ 上の点密度を $c_\mu(z)$ とするとき, 次がなりたつ.

**Proposition 11.** $z \notin B(h)$ に対しては $c_\mu(h(z)) = \lambda c_\mu(z)$ がなりたつ. $z \in B(h)$ に対しては $c_\mu(h(z)) \leq \lambda c_\mu(z)$ となる.

この命題は, KMS state の分類において, 点密度の処理に用いられる.

$\bar{F}$ を $a \in C(\mathbb{C})$ に対して $\bar{F}(a)(z) = (1/N)\sum_{w \in h^{-1}(w)} e(w)a(w)$ で定義する. $\bar{F}$ は $C(\hat{\mathbb{C}})$ 上の写像である.

**Proposition 12.** *(Lyubich [7]) $\hat{\mathbb{C}}$ 上に次の性質をみたすボレル確率測度 $\mu^L$ が存在する. $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ は $h$ の例外点を含まない任意のコンパクト集合で, $a \in A = C(\hat{\mathbb{C}})$ とするとき,*

$$\lim_{m \to \infty} \|\overline{F}^m a - \int_{\hat{\mathbb{C}}} a(z)d\mu^L(z)\|_K = 0$$

*がなりたつ. なお, $\mu^L$ のサポートは $h$ のジュリア集合に含まれている.*

測度 $\mu^L$ を Lyubich 測度とよび, 有理関数力学系のエルゴード性に密接に関係している. なお, Lyubich 速度は点密度を持たないことが知られている.

**Proposition 13.** *Lyubich 測度は, $\mathcal{O}_h$ の $\log N$-KMS state $\varphi^L$ に拡張できる.*

**Proposition 14.** *$h$ は例外点を持たないとする.*

1. *$\lambda < N$ のときは, KMS state は存在しない.*
2. *$\lambda = N$ とする. KMS-state は一意的で, $\varphi^L$ に限る.*

$\lambda > N$ とする. $B(h)$ 上の点 $z$ の点密度を $\delta_z$ とかく. $\mu'_z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{w \in h^{-i}(z)} \delta_w$ と置くと, $\lambda > N$ によってこの級数は絶対収束する. $\mu'_z$ を正規化した確率測度を $\mu^{\{z\}}$ とかく. $B(h) = \{z_1, \dots, z_p\}$ とする.

**Proposition 15.** *$\lambda > N$ とする. $\mu^{\{z_j\}}$ は Theorem 10 条件 (3), (4) をみたし, $\mathcal{O}_H$ の KMS state に拡張される. さらに $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度 $\mu$ で Theorem 10 条件 (3), (4) をみたすものは $\{\mu^{\{z_i\}}, (i = 1, \dots, p)\}$ の凸結合で書ける.*

例外点が2つの場合を考える. $a \neq 0$ とする. $h(z) = az^N$ $(N \geq 2)$ のとき, 例外点は $0$ と $\infty$ で, それぞれの軌道は $\{0\}$ と $\{\infty\}$ である.

**Proposition 16.** *$h(z) = az^N$ $(N \geq 2)$ のとき, $\mu^{\{0\}} = \delta_0$ と $\mu^{\{\infty\}} = \delta_\infty$ はそれぞれ任意の $\lambda \geq 1$ に対して $\mathcal{O}_h$ の $\log \lambda$-KMS state に拡張される. $\lambda = 1$ のときは無限型であり, $\lambda > 1$ のときには有限型である.*

$h(z) = a/z^N$ $(N \geq 2)$ のとき, 例外点が $0$, $\infty$ で, $h^{-1}(\infty) = \{0\}$, $h^{-1}(0) = \{\infty\}$ である.

**Proposition 17.** *$h(z) = a/z^n$ $(n \geq 2)$ とする. $\lambda \geq 1$ 以上のときに例外点に対応する $\log \lambda$-KMS state の端点を求める.*

$$\mu^{\lambda,1} = \frac{1}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_\infty$$

と

$$\mu^{\lambda,2} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{1}{\lambda+1}\delta_\infty$$

とおいて, これらに対応する $\mathcal{O}_h$ の KMS-state を $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ とするとき, 例外点に対応する $\log \lambda$-KMS state はこれらの凸結合であり, $\delta_0$, $\delta_\infty$ の係数を座標と考えたときの第一象限の線分に対応する. ただし, $\lambda = 1$ のときのみ無限型になり, 1 点に退化する.

**Theorem 18.** 有理関数 $h$ によって与えられる複素力学系に付随した $C^*$- 環のゲージ作用による *KMS-state* の端点は, 次のように分類できる. $\lambda = e^\beta$ とおく.

*1.* 例外点がない場合. $\lambda = N$ のときは, *Lyubich* 測度によって決まる *KMS state* $\varphi^L$ に限る. $\lambda > N$ のときは, $\{\varphi^{\{z\}} | z \in B(h)\}$ である. $1 \leq \beta < N$ のときは存在しない.

*2.* 例外点が1個で $z$ の場合, $1 \leq \lambda < N$ のときは, 例外点に対応する *KMS-state* $\varphi^{\{z\}}$ が1つのみある. $\lambda = N$ のときは, $\varphi^L$ と $\varphi^{\{z\}}$ が両方存在する. $\lambda > N$ のときは, $\{\varphi^{\{z\}} | z \in B(h)\}$ である. なお, $\varphi^{\{z\}}$ は $\lambda = 1$ のときのみ無限型で $\lambda > 1$ のときは有限型である.

*3.* 例外点が2つで $z_1$ $z_2$ であり独立している場合. $1 \leq \lambda < N$ のときは, $\varphi^{\{z_1\}}$ と $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である. $\lambda = N$ のときは, $\varphi^L$, $\varphi^{\{z_1\}}$, $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である. $\lambda > N$ のときは, $\varphi^{\{z_1\}}$ と $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である.

*4.* 例外点が2つで互いに移りあうとき. $1 \leq \lambda < N$ のときは $\varphi^{\lambda,1}$ と $\varphi^{\lambda,2}$ が端点で, $\lambda = N$ のときは, $\varphi^L$ および $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ であり, $\lambda > N$ のときは, $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ である.

以上で, 有理関数によって与えられる複素力学系の KMS-state の端点に関する完全分類である. なお, 複素力学系の共役類がもっている情報として, 例外点の個数とタイプ, 分岐点の数, 次数 (被覆次元) などが, すべて KMS state の情報から復元できる.

## 4.2 自己相似写像

有限分岐点条件, 開集合条件をみたす自己相似写像の場合においても, 同様の分類がなりたつ. ただし, 例外点にあたるものはなく, $\lambda < N$ のときには KMS state はない. また, Lyubich 測度にあたるものは, Huchinson 測度である. 自己相似写像の場合, 複素力学系の場合と比べて, 力学系としての情報をそれほど復元できない.

いくつかの例について, 分類を具体的に説明する. Huchinson 測度に対応する $\mathcal{O}_\gamma$ の $\log N$ KMS state を $\varphi^H$ とかく.

**Example 4.1.** $K = [0,1]$ とし, $\gamma_1(y) = \frac{1}{2}y$, $\gamma_2(y) = \frac{1}{2}(y+1)$ とする. $K$ は $(\gamma_1, \gamma_2)$ に関する自己相似写像である. この場合, $B(\gamma) = \phi$ かつ $C(\gamma) = \phi$ である.

これは, 分岐点がなく, Cuntz 環を生成する. KMS state は一意的である [9].

**Example 4.2.** $K = [0,1]$ とし, $\gamma_1(y) = \frac{1}{2}y$, $\gamma_2(y) = 1 - \frac{1}{2}y$ とする. $K = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に関して自己相似である. このとき, $B(\gamma) = \{\frac{1}{2}\}$ かつ $C(\gamma) = \{1\}$ である.

これは, テント写像と呼ばれる. 分岐点はただ一つである. $\mathcal{O}_\gamma$ は生成元2の Cuntz 環ではなく, $\mathcal{O}_\infty$ になる [5].

**Proposition 19.** *Example 4.2* の *KMS state* は次のとおりである.

*1.* $\lambda = 2$ のときは, $\varphi^H$ のみ存在し, 無限型である.

*2.* $\lambda > 2$ のときは, $\varphi^{\{1/2\}}$ のみ存在し, 有限型である.

ここで,

$$\delta^{\{1/2\}} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{j_1,\dots,j_i \in \{1,2\}} \delta_{\gamma_{j_i} \cdots \gamma_{j_1}(1/2)}$$

とすると, $\varphi^{\{1/2\}}$ は $\delta^{\{1/2\}}$ の拡張である.

**Example 4.3.** $K = [0,1]$ で $\gamma$ が開集合条件をみたすときも同様に, $\lambda = N$ のときは $\varphi^H$ のみ, $\lambda > N$ のときには,

$$\delta^{\{x\}} = \frac{\lambda - N}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{j_1,\dots,j_i \in \{1,\dots,N\}} \delta_{\gamma_{j_i} \cdots \gamma_{j_1}(x)}$$

とおいて, $\{\delta^{\{x\}} | x \in B(\gamma)\}$ が $\log \lambda$-KMS state の端点に対応しており, 対応する $\log \lambda$-KMS state は有限型である.

**Example 4.4.** $\Omega$ を $\mathbf{R}^2$ 3頂点が $c_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $c_2 = (0,0)$, $c_3 = (1,0)$ となる正三角形とする. $c_1c_2$ の中点が $b_1$, $c_1c_3$ の中点が $b_2$, $c_2c_3$ の中点が $b_3$ とする. 真の縮小写像系 $\tilde{\gamma}_i$ $(i = 1,2,3)$ を

$$\tilde{\gamma}_1(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad \tilde{\gamma}_2(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad \tilde{\gamma}_3(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

で定義する. また $\alpha_\theta$ を角度 $\theta$ の回転とする. $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$, $\gamma_2 = \alpha_{-2\pi/3} \circ \tilde{\gamma}_2$, $\gamma_3 = \alpha_{2\pi/3} \circ \tilde{\gamma}_3$ とおく. $S$ で, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ によって決まる自己相似集合を表す. $c_i$ および $b_i$, $i = 1,2,3$ は $S$ に含まれる. このとき, $B(\gamma) = \{b_1, b_2, b_3\}$ かつ $C(\gamma) = \{c_1, c_2, c_3\}$, である.

この例の $S$ は, Sierpinski gasket とよばれるフラクタル集合であるが, 自己相似写像の作り方が通常のものと変わっていて, 分岐点が生じる. $\lambda > 3$ として,

$$\delta^{\{b_k\}} = \frac{\lambda - 3}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{j_1,\dots,j_i \in \{1,2,3\}} \delta_{\gamma_{j_i} \cdots \gamma_{j_i}(b_k)}$$

とおく. $\varphi^{\{b_k\}}$ は $\delta^{\{b_k\}}$ を拡張した KMS state とする.

**Proposition 20.** $\mathcal{O}_\gamma$ のゲージ作用に関する $\log \lambda$-*KMS state* は次のようになる.

*1.* $\lambda < 3$ のときは, *KMS state* は存在しない.

*2.* $\lambda = 3$ のときには, $\varphi^H$ のみであり, 無限型である.

*3.* $\lambda > 3$ のときは, $\{\varphi^{\{b_k\}} | k = 1,2,3\}$ が *KMS state* の端点である. これらは有限型である.

なお, テント写像, 上の Sierpinski gasket 力学系は, それぞれ $h(z) = 2z^2 - 1$, $h(z) = \frac{z^3 - \frac{16}{27}}{z}$ によって決まる複素力学系をジュリア集合に制限したものとしても実現できる.

## References

[1] Beardon A.F. *Iteration of rational functions* GTM 132, 1991, Springer New York

[2] Exel R. and Laca M., *Partial dynamical systems and the KMS condition,* Commun. Math. Phys., 232(2003), 223–277

[3] Izumi M., Kajiwara T. and Watatani Y. *KMS states and Branched points,* in preparation

[4] Kajiwara T. and Watatani Y., *$C^*$-algebra associated with complex dynamical systems,* to appear in Indiana Univ. Math. J.

[5] Kajiwara T. and Watatani Y., *$C^*$-algebras associated with self-similar sets* to appear in J. Operator Theory

[6] Kajiwara T. and Watatani Y., *KMS states on $C^*$-algebras associated with self-similar sets,* [arXiv : math.OA/0405514]

[7] M. Yu. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 351-385.

[8] Laca M. and Neshveyev S., *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras,* J. Funct. Anal. 211(2004) 457–482

[9] Pinzari C., Watatani Y. and Yonetani K. *KMS states, entropy and the variational principle in full $C^*$ -dynamical systems,* Commun. Math. Phys. 213(2000), 331–379